Martin Wagenschein: Ein Unterrichtsgespräch zu dem Satz Euklids über das Nicht-Abbrechen der Primzahlenfolge (1949)[1]

«Ist aber die Entdeckung einer Erkenntnis in sich selber nicht ein Akt der Erinnerung?» *Sokrates*

«Wechselgespräch ist eine Grundform, an der die Wahrheit an den Tag kommt.» *Jaspers*

I

Der ebenso einfache wie geniale antike Beweis dafür, dass die Folge der Primzahlen niemals abbrechen kann, gehört zu den wenigen wirklich unentbehrlichen Stücken des mathematischen Lehrgutes. Ohne irgendwelche Vorkenntnisse vorauszusetzen, lässt er erfahren was es heißt, mathematisch zu denken. Für die überhaupt dafür Empfänglichen is: ojss-aktive Begreifen dieses souveränen Verfahrens ein unvergessliches Erlebnis. Der Beweis geht (in seiner heute üblichen Fassung) bekanntlich so vor, dass das Produkt aller Primzahlen hinauf bis zu irgendeiner, p, gebildet wird, und dass dann durch Hinzufügen der Eins eine Zahl entstehen muss,

$N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot p + 1$,

die durch keine dieser Primzahlen teilbar sein kann. Wenn sie also nicht selber Primzahl. ist, so kann sie nur solche Primfaktoren haben, die oberhalb von p liegen. Es gibt also n jedem Falle Primzahlen, die größer sind als p.

Das ist schnell gesagt und vom mathematisch Geübten auch leicht verstanden. Es dem: Anfänger einfach zu erzählen, hieße, das Kind auf den Berg hinauftragen, statt es ihn. ersteigen zu lassen. Wie anders sieht es dann die Aussicht, tief atmend, durchblutet, mit weiten Augen. Nur wer die Höhe gewann, weiß, was Höhe ist.

Wie wenige mathematische Fragen ist dieses Problem geeignet, im aktiven Gespräch einer Gruppe errungen zu werden. Nur muss die Frage erst einmal gesehen werden, und dazu muss der Lehrer vieles sagen, ehe er dann schweigt, indem der eigentliche Unterricht beginnt. Er wird sehen lassen, wie die Abstände von Primzahl zu Primzahl sich immer mehr dehnen, wie sie (nicht ausnahmslos, doch im Durchschnitt) immer größer werden Und das ist begreiflich: Je größer eine Zahl ist, desto mehr andere, kleinere stehen unter ihr als Teiler für sie bereit. So sieht man die Lücken sich immer weiter dehnen, und es dämmert die Möglichkeit, dass es einmal mit den Primzahlen ganz aus ist, dass einmal keine mehr kommt, dass sie aussterben, dass es eine letzte, eine größte gibt.

Setzt man diese, recht intensiv so vorbereitete Frage in einen Kreis junger Menschen, so beginnt sofort ein Prozess, der einer chemischen Reaktion verglichen werden kann in der Gesetzlichkeit seines Ablaufes. Schöner aber und tiefer erscheint der Vergleich mit Vorgang der Erinnerung, dem Gleichnis, das Platon gebraucht (Menon). Denn es ist gerade so, als sei die Lösung insgeheim gegenwärtig, wie hinter dem Vorhang des Unbewussten, und setze sich langsam und in Stufen durch. Der Lehrer ist dabei unentbehrlich, nicht wie einer, der etwas stückweise preisgibt, sondern wie ein Agens, das die Leitungswege gleichsam ionisiert, auf denen das seelische Kollektiv kommuniziert: in sich selbst und mit dem geistigen Reich, in welchem die mathematischen Wahrheiten bestehen.

---

[1] In: Wagenschein, Martin ([4]2009): Naturphänomene sehen und verstehen. Genetische Lehrgänge. Das Wagenschein Studienbuch. Hg: H. Chr. Berg, S. 220-227

II

Als Beispiel für diesen überpersönlichen Verwirklichungsprozess gebe ich hier den Bericht über den Weg, den das Unterrichtsgespräch genommen hat in einer Gruppe von 13 Jungen und Mädchen verschiedener Nationen im Alter zwischen 14 und 17 Jahren in Paul Geheebs Ecole d'Humanite (Goldern, Schweiz), einer der wenigen Schulen, die noch die «Musse» (was ja der Ursinn des Wortes «Schule» ist) lassen, in der allein Bildung geschehen kann. Ich gebe ihn deshalb, weil sich dabei ganz besonders eindrucksvoll erkennen ließ, wie der antike Beweis sich immer mehr durchsetzte, bewusst wurde, von neuem erwuchs, «an den Tag kam». Ich möchte vermuten, dass das Gespräch der unbekannten einzelnen Griechen, die diesen Gedanken zuerst dachten, ähnliche Wege gegangen ist.
Um den Bericht anschaulich zu halten, führe ich die einzelnen Mitglieder der Gruppe, soweit sie hervortreten, mit dem Namen an, den sie in der großen Familie dieser Schule tragen. Auch Alter und Nationalität scheinen mir nicht unwesentlich. Wie sehr eine Heimschule wie diese den Bildungsvorgang begünstigt, zeigt sich unter anderem darin, dass die entscheidenden Einfälle und Vorschläge oft nicht in der Unterrichtsstunde, sondern tagsüber in Gesprächen oder gar nachts gefunden worden sind. Zuweilen bildeten die Primzahlen den Gesprächsstoff auf Treppen und Gängen.
Dieses Stehenlassen des Persönlichen darf nicht davon ablenken, dass die folgende Skizze gerade betonen möchte, wie sehr Persönliches hier nur zufällige, nur illustrative Bedeutung hat. Zuletzt ist gleichgültig geworden, ob nun Marianne oder Peter dies oder jenes gefunden hat. Das spüren auch Peter und Marianne, und gerade darin äußert sich ein Bildungswert der Mathematik. Der Einzelne bedeutet nur vorübergehend etwas, er ist nur das Sprachrohr, durch welches die Wahrheit sich ankündigt.
Dem Kurs standen täglich 60 Minuten zur Verfügung. «Hausaufgaben» sind in dieser Schule nicht üblich.

Die erste Stunde war ganz dazu verbraucht worden, das Thema sichtbar zu machen und die Verbindung zwischen ihm und der Gruppe zünden zu lassen.
Schon vor der zweiten Stunde hatte die sechzehnjährige Deutsch-Engländerin Gabi geglaubt, eine Primzahl-Formel gefunden zu haben, nämlich $2\,n \pm 1$. In der Tat, sie stimmte immer in dem Sinn, dass außer 2 jede Primzahl in diese Form passte (in der n irgendeine natürliche Zahl bedeutet). Doch hatte Gabi bald bemerkt, dass damit ja nur die Selbstverständlichkeit ausgesagt ist, dass jede Primzahl ungerade sein muss (2 ausgenommen).

In der zweiten Stunde wurde deshalb dieser Gedanke gar nicht mehr ganz bewusst ins Auge gefasst und nur noch historisch gestreift. Im Gespräch mit Gabi war nämlich der vierzehnjährige Deutsche Peter auf einen Satz gekommen, den er zwar noch nicht beweisen konnte, den er aber überzeugt vertrat, zumal alle Stichproben stimmten.
(1) Jede Primzahl (oberhalb 3), behauptete er, habe die Form $6\,n+ 1$ oder (wenn nicht das, so doch) 6n-l.n bedeutete dabei wieder eine beliebige natürliche Zahl. Man prüfe: 23;37;41;43.

Wie er darauf gekommen war, konnte er nicht ganz deutlich zurückrufen; aber er hatte, wie er sagte, «die 3 auch berücksichtigen» wollen. Der Kundige bemerkt, wie der Anfang der Operation Euklids, das 2 • 3 ..., sich schon durchsetzt.
Wir verteilten nun aus einer Tabelle die P. Z. (Primzahlen) bis 10000 unter uns zur Durchmusterung: Die Formel stimmte immer. Doch war allen klar, dass damit nichts entschieden war, dass nur ein Versager eine endgültige Entscheidung bringen könnte und dass Peters Satz noch zu beweisen wäre.
Es begann ein wildes Suchen. Diesen etwas blinden Wetteifer musste ich steuern, indem ich daran

erinnerte, was wir denn eigentlich wollten. Was würde denn der Satz (1), wäre er richtig, für unsere Frage nach der letzten Primzahl bedeuten? Würde er helfen?
Ja, das würde er, fand man einstimmig, denn dieses 6n±l ließe sich ja «mit n beliebig hochschrauben».
Nur einer bemerkte hier etwas Entscheidendes: Nein, die Gültigkeit des Satzes (1) werde uns leider gar nichts nutzen (wir brauchten uns also um einen Beweis gar nicht zu bemühen), denn er sage ja nicht, dass 6 n ± 1 immer auf eine P. Z. führe!
Es bedurfte eines längeren Gespräches, um fast alle dahin zu bringen, dass sie unterscheiden lernten zwischen einem Satz und seiner Umkehrung. Wir formulierten gemeinsam jetzt zwei Sätze, wozu besonders der sechzehnjährige Israeli Elnis beitrug:
Satz I: «Alle Primzahlen (oberhalb 3) passen in die Form 6n± 1.» Dieser, wie es scheint, richtige Satz ist von uns nicht bewiesen, braucht aber auch nicht bewiesen zu werden, denn er kann uns nicht weiterhelfen.
Satz II (die Umkehrung von I): «Alle Zahlen von der Form 6 n±l sind Primzahlen» {n bedeutet in beiden Sätzen eine beliebige natürliche Zahl).
Dieser zweite Satz könnte uns helfen. Leider erwies er sich As falsch. Denn bald sammelten wir Versager:
6-4 + 1=25=5 -5; 6-20+1 = 121 = 11 • 11;
6-20-1 = 119 = 7 • 17;6- 11-1 = 65 = 5 • 13.

Dritte Stunde. Das Verständnis für den Unterschied zwischen einem Satz und seiner Umkehrung klärt sich erst jetzt völlig durch die Parallele:

Satz I: Alle Berner sind Schweizer (richtig).
Satz II: Alle Schweizer sind Berner (falsch).

Es nützt uns also gar nichts, wenn wir 6 n ± 1 beliebig hochschrauben können, denn 6 n ± 1 braucht keine P. Z. zu sein. (Was wir hochschrauben können, sind gewiss «Schweizer», aber ob auch «Berner» darunter sind, ist nicht gesagt.) Es könnte sein, dass von einem gewissen n ab der Ausdruck 6 n ± 1 nur noch Nicht-P. Z. lieferte. Unterbrechen wir den Bericht und fragen wir uns, was der (nun «erledigte») Vorschlag 6 n + 1 eigentlich bedeutet für den, der Bescheid weiß. Die allererste, richtige Vermutung, dass jede P. Z. (oberhalb 2) in die Form 2 n ± 1 passe, löste sich auf als die Trivialität, dass sie natürlich ungerade sein müsse. Die nächste Forderung, jede P.Z. sei in das Schema 6 n + 1 einzufangen, sagt aber etwas beinahe ebenso Selbstverständliches - und Peter durchschaut es auch und spricht es aus -: dass sie nämlich auch durch 3 nicht teilbar sein darf und nicht nur durch 2 nicht. Weder die 2 noch die 3 darf in ihr stecken. Daher die Form 2 • 3 • n ± 1.

(Warum aber nicht nur 6 n + 1, sondern auch 6 n-1? Der Finder der Formel fühlte sich offenbar gedrungen, alle P. Z. zu fassen, während es ja dem Entdecker des euklidischen Ansatzes darauf ankommt, irgendeine, aber eine möglichst hohe P. Z. zu erzeugen. Schriebe man nur 6 n ± 1, so würde man nur solche Zahlen treffen, die durch 3 geteilt den Rest lassen. Will ich auch solche haben, die den Rest 2 lassen - und das sind diejenigen, die um 1 unter einem Sechsfachen liegen -, so muss ich auch 6 n - 1 berücksichtigen.) Der Vorschlag 6 n + 1 löst sich also für den Wissenden auf in die Selbstverständlichkeit, eine P. Z. natürlich nicht nur durch 2 nicht, sondern auch durch 3 nicht teilbar sein Das genügt aber natürlich nicht. Die Bedingung ist notwendig, aber nicht hinreichend. - Diese Einsicht ist den Lernenden noch verdeckt durch die Höhe, die sie noch zu ersteigen haben.
Wesentlich ist, wie der euklidische Ansatz sich schrittweise verwirklicht.

So auch in dem nächsten Vorschlag, der nun kommt. Elnis glaubt, dass zwar nicht jedes 6 n ± 1 (wo n eine natürliche Zahl ist) auf eine P. Z. führt, dass aber (2) 6p + 1 (wo p eine Primzahl ist) immer

eine neue (größere!) P.Z. aufbaut! Der euklidische Ansatz ist jetzt also in der Form $2 \cdot 3 \cdot p + 1$ noch näher gerückt. Wer am Ziel steht, erkennt sofort, dass Satz (2) falsch ist. Denn es ist durch Elnis' Ansatz nun außer 2 und 3 auch der Teiler p ausgeschlossen, aber p ist ja nicht die einzige P. Z. außer 2 und 3, es gibt ja mehr als diese drei. Die Arbeitsgruppe selbst durchschaute es noch nicht. Aber sie fand, dass der Satz nicht stimmen könne: Der eine Versager $6 \cdot 29 + 1 = 175$ genügt dazu.
Tatsächlich enthält 175 weder 2 noch 3 noch 29, aber damit ist eben die 5 nicht verhindert in 175 zu stecken. Das eine p ist eben zu wenig. Damit rückt der euklidische Ansatz in Greifweite. Die Lösung ist leicht zu sehen für den, der sie weiß. Der Neuling tastet ins Dunkel, diesmal wieder Elnis. Und zwar so: Er steht vor der Tafel und schreibt und denkt laut (nach der Stunde: «42 ist 2 mal 3 mal 7. Da ist die 2 drin und die 3 und die 7. Und in 43 sind sie nicht drin. Jetzt müsste man nur noch sehen, ob vielleicht die 5 drin sein könnte. Man müsste die Teilbarkeitsregeln benutzen. Bei 3 die Quersumme usw. ?» - Das ist ein guter Weg sage ich ihm, aber die Teilbarkeitsregeln, die brauchst du nicht! Es geht ohne sie! Am nächsten Morgen kommt er strahlend zum Frühstück: ich hab' die Lösung! Im Unterricht verkündet er sie:
Wenn p die größte P. Z. ist, die ich kenne, dann ist
$N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot p + 1$
(wobei das Produkt alle Primzahlen bis p enthalten soll) bestimmt auch eine P. Z., und eine größere als p!
Damit hat sich der euklidische Ansatz durchgesetzt. Wenn auch noch gebunden an einen Irrtum: Elnis' Begründung ist nämlich wörtlich diese: «Diese Zahl ist nicht durch 2, durch 3 usw. und nicht durch p, also durch <nichts> teilbar!» (Er meint: durch keine Zahl.) Alle stimmen überzeugt zu. Auch stimmen die Proben:
$2 + 1=3$
$2 \cdot 3 +1=7$
$2 \cdot 3 \cdot 5 +1=31$
$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1=211$
$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 + 1=2311$

So weit stehen sie alle in der Tafel der P. Z. Aber
$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031$
wird ja wohl auch eine P. Z. sein, sie sieht so aus.
Ich bleibe zögernd und fordere zu schärfster Kritik und Prüfung auf. Merkwürdigerweise kommt die Lösung nicht auf experimentellem Wege durch Entlarvung der Zahl 30031, wie ich angenommen hatte.
Am Abend überrascht mich die sehr spröde und bisher fast schweigende Marianne, eine aus dem Baltikum vertriebene Fünfzehnjährige, dadurch, dass sie mir den Fehler in der Begründung des Satzes (3) klar ausspricht.
Noch mehr: Am Morgen ein Jubelschrei von Gabi: Nicht nur das: Sie könne sogar nun beweisen, dass es keine letzte P. Z. geben könne! Sie hat den Beweis wirklich, er ist da.

Vierte Stunde. Zuerst gibt einer, der noch an den Satz (3) glaubt (der Finder Elnis selbst ist schon schwankend), noch einmal den vermeintlichen Beweis wieder: (« ... also ist diese Zahl durch keine Zahl teilbar»).
Dann lasse ich Marianne ihre Widerlegung geben. Sie sagt (und gibt es mir zugleich auf einen Zettel geschrieben):
«Die Behauptung von Elnis ist nicht vollständig. Denn es gibt zwischen P und N noch andere P. Z. N kann eine P. Z. sein. Es kann aber auch sein, dass N keine P. Z. ist. Dann gibt es noch P. Z. im Zwischenraum zwischen p und N, durch welche die Zahl N teilbar ist.»
Das sehen bald alle ein. Zumal ich nun als Illustration verrate und nachprüfen lasse, dass
$30031 = 59 \cdot 509$, also keine P.Z. ist. 59 und 509, das sind also P. Z. zwischen p und N.

Damit ist Elnis' Satz (3) «erledigt».
Nun erst kam das Erstaunliche zur Sprache, das, was Gabi in der Nacht klar geworden und was, wie sich herausstellte, auch Marianne am Abend schon aufgeschrieben hatte. Ihr Zettel geht nämlich weiter:
«In beiden Fällen ist bewiesen, dass es keine letzte P. Z. gibt, da man dies weiterführen kann.»
Nun, das ist reichlich konzentriert. Ich bitte Gabi, es zu sagen: Es gelingt ihr in vollendeter Präzision, aber es ist so einfach und klar gesagt, dass keiner die Pointe erkennt. Sie vergisst auszumalen, was hier das «Aufregende» ist und es ihr war: dass nämlich das Versagen von Satz (3), seine Widerlegung, gerade eben das schafft, was der erledigte Satz (3) nicht mehr schaffen kann. Der Feind wird zum Freund. Das Blatt wendet sich. Zwar muss die so schön große Zahl N selbst nicht Primzahl sein. Sie ist nicht immer die P. Z., die berufen ist, p zu übertreffen. Aber ihre Teiler, wenn sie welche hat, sind ja auch oberhalb p, müssen es sein, sie leisten das, was N selbst nicht immer leisten kann.
Dieses Stück der Beweisführung müsste «feierlich gesagt werden», meint einer, «mit Trompetensignalen» ein anderer.
Zunächst haben es vielleicht nur zwei verstanden. Sie wiederholen es nun in ihren eigenen Worten, zur Not auf Französisch oder Englisch, bis neue Anhänger entstehen, die es nun auf ihre Weise noch einmal sagen. So gewinnen wir schließlich fast alle.
Zum Überfluss lasse ich es alle gleichzeitig noch einmal aufschreiben, jeden auf einen Zettel. Etwa die Hälfte bringt den Beweis sachlich richtig zuwege. Manche bleiben unvollständig, bei nur wenigen befriedigt auch die sprachliche Präzision. Am besten ist das, was Gabi geschrieben hat. Es ist druckfertig. Kurioserweise tut sie nach der Stunde die Äußerung, dieser Beweis sei wunderbar, aber «Mathematik» sei scheußlich. (Sie meint das, was sie bisher dafür hielt.)

Fünfte Stunde. Sie dient ausschließlich der Formulierung. Ich hatte mir aus den Niederschriften die besten Stellen herausgezogen; sie lagen vor mir. Dann formten wir aus den Vorschlägen, wie sie bald von diesem, bald von jenem kamen, Satz für Satz. Die ausgesuchten besten schriftlichen Vorschläge bot ich besonders an. Das meiste diktierte Elnis. Obwohl er sonst einen hartnäckigen Widerstand gegen Übungen in der ihm noch ungeläufigen deutschen Sprache zeigte, bewährte er sich hier sehr. Sein Widerspruchsgeist brachte sich selber um: Indem er fast jedem Vorschlag widersprach, konnten wir ihm fast jeden zur endgültigen Fassung übergeben. Sie gelang ihm gut, und er konnte sie dann gleich diktieren. (Im Grunde fand er es überflüssig, Dinge aufzuschreiben, die man begriffen hatte. Gegen Ende der Stunde bemerkte er sehr erstaunt, dass auch ich mitschrieb und fragte [in seinem Anfängerdeutsch: «Du schreibst den Euklid auch noch mal auf??»)
Diese gemeinsame Niederschrift möge hier folgen. Von mir stammt die Gliederung 1., 2., 3. (Die strategisch wichtige Voranstellung der Vorbemerkungen 2., deren Inhalt sonst die Beweisführung leicht verstopft, ist vom Anfänger nicht zu erwarten.)

Ein Satz über Primzahlen
1. Frage
Jede natürliche Zahl ist in Primfaktoren zerlegbar. 30 = 2 • 3 • 5. Solche Zahlen, die durch keine andere
natürliche Zahl außer 1 und sich selbst teilbar sind, heißen Primzahlen.
Man weiß, dass die Primzahlen mit ansteigender Zahlengröße im Großen und Ganzen immer seltener werden. Also entsteht die Frage: Gibt es eine letzte Primzahl?
2. Vorbemerkungen
a) Das Vielfache von irgendeiner Zahl, um eins vermehrt, ist nicht mehr durch diese Zahl teilbar. 4 mal 3 ist 12, also ist 13 nicht mehr durch 3 teilbar.
b) a • b • c • d ist teilbar sowohl durch a wie durch b wie durch c wie durch d.
a • b • c • d +1 ist also durch keine dieser Zahlen teilbar (durch andere vielleicht).
3. Der eigentliche Beweis

p sei die letzte Primzahl, die wir kennen. Wir multiplizieren alle Primzahlen bis p miteinander und addieren 1 dazu. Das Ergebnis
N = 2 • 3 • 5 • 7 • 11 • ... • p + 1 ist dann unteilbar durch alle diese Primzahlen. Es gibt nun zwei Möglichkeiten:
Entweder ist N selbst eine Primzahl, und zwar (natürlich immer) eine größere als p (z.B.2-3-5-7 + l=211).
Oder N ist eine teilbare Zahl. Dann muss sie Primfaktoren haben, die höher sind als p (z.B.: 2 • 3 • 5 • 7 • 11 • 13 + 1=30031 = 59 • 509).
In jedem dieser beiden Fälle taucht eine neue Primzahl auf, die größer ist als p. Im ersten Fall N (211), im zweiten Fall mindestens zwei Primzahlen zwischen p und N (59 und 509, zwischen 13 und 30031). Da das Verfahren fortgesetzt werden kann, indem man die neue größte Primzahl 211 bzw. 509 statt p setzt:
2 • 3 • 5 • 7 • 11 • ... • 211 + 1 bzw. 2 • 3 • 5 • 7 • 11 • ... • 509+1
kann man immer größere Primzahlen bilden.

Die Untersuchung war damit beendet.

III

Ich gab zum Schluss einige Hinweise darauf, dass die Mathematik selbst ohne Ende ist, indem ein Problem das andere wachruft. Die euklidische Operation N = 2 • 3 • 5 • 7 • 9 • 11 • ... • p + 1 liefert, wie wir sahen, nicht jede Primzahl. Die Genialität dieses Ansatzes liegt ja gerade darin, dass er nur das erzeugt, was er braucht: große Primzahlen und immer größere. Eine Formel, die jede Primzahl liefert (so wie 2 n + 1 der Reihe nach jede ungerade Zahl herstellt), gibt es bis heute nicht. Es macht dem Anfänger großen Eindruck zu hören, dass Fragen, die - als Fragen - jedes Kind verstehen kann, unlösbar schwierig sein können.
Zuletzt gelang es, eine deutsche Übersetzung von Euklids «Die Elemente» kommen zu lassen und Euklids Formulierung mit unserer eigenen zu vergleichen. Auch sie möge hier folgen:

«Es gibt mehr Primzahlen als jede vorgelegte Anzahl von Primzahlen.
Die vorgelegten Primzahlen seien a, b, c. Ich behaupte, dass es mehr Primzahlen gibt als a, b, c. Man bilde die kleinste von a, b, c gemessene Zahl. Sie sei DE, und man füge zu DE die Einheit DF hinzu. Entweder ist EF dann eine Primzahl, oder nicht. Zunächst sei es eine Primzahl. Dann hat man mehr Primzahlen als a, b, c gefunden, nämlich a, b, c, EF.
Zweitens sei EF keine Primzahl. Dann muss es von irgendeiner Primzahl gemessen werden; es werde von der Primzahl g gemessen. Ich behaupte, dass g mit keiner der Zahlen a, b, c zusammenfällt. Wenn möglich, tue es dies nämlich, a, b, c messen nun auch DE; auch g müsste dann DE messen. Es misst aber auch EF. g müsste also auch den Rest, die Einheit DF, messen, während es eine Zahl ist; dies wäre Unsinn. Also fällt g mit keiner der Zahlen a, b, c zusammen; und es ist eine Primzahl nach Voraussetzung. Man hat also mehr Primzahlen als die vorgelegte Anzahl a, b, c gefunden, nämlich a, b, c, g.»

Wir verglichen diese Fassung - so weit es möglich war, Satz für Satz - mit der eigenen, und es wurde bemerkt, dass Euklids Behauptung bescheidener, sparsamer, aber die unsere selbstverständlich mitumfassend sei; dass «unser Text» zwar «verständlicher», der seine dafür aber (zumal er ja nicht für Kinder geschrieben habe) nicht nur genauer und vollständiger, sondern vor allem «rassiger» sei. Ein Wort, mit dem, glaube ich, etwas sehr Zutreffendes zu sagen versucht wurde.
Möge es nicht als unbescheiden empfunden werden, wenn ich einen einzigen Lehrgang über einen einzigen Satz, der in 5 Minuten zu verstehen ist und der sich nun über 5 Stunden ausgebreitet hat, so ausführlich wiedergegeben habe. Es scheint mir, dass nur von einem solchen Einzelbeispiel aus ein hinreichend helles Licht fallen kann auf Fragen wie diese: Warum treiben wir in der Schule

Mathematik? Was wollen wir erreichen? Wie können wir den Stoff beschränken? Wo sind die wirklich unentbehrlichen Stoffe? (Auch Prüfungsstoffe! Es ist schlechterdings unmöglich, diesen Beweis unverstanden so auswendig zu lernen, dass man eine Diskussion darüber bestehen könnte!) Sind unsere Schulstoffe, die wir in atemloser Hetze durchlaufen, wirklich alle unentbehrlich? Hören wir auf das Wort der kleinen Gabi: «Das ist wunderbar, aber Mathematik ist scheußlich!»

Nachtrag

Einige Monate später schrieb sie: «Sie ahnen nicht, wie aufregend es war. Wir dachten wirklich an nichts anderes. Ich weiß noch den heißen Nachmittag mit Elnis unter dem Haselnussstrauch, als er den Satz fand: Und nachts, oben in der Hütte, war ich so aufgeregt, als ich den fertigen fand, dass ich zum Fenster raussprang und auf die Bidmisalp ging.»
Später: «Mathematik war für mich immer der Inbegriff der Langeweile gewesen, und ich konnte kaum verstehen, wie dieses herrliche Erlebnis auch Mathematik heißen konnte ... Es war, wie wenn ein neuer Teil des Gehirns entdeckt und in Gang gesetzt wurde... Bei jeder neuen Entdeckung schien ein neues Licht angeknipst zu werden, und das Entdeckte war dann fast lächerlich klar ... Als wir nach mehreren Tagen die Aufgabe gelöst hatten, waren wir so stolz, als wenn das Primzahlenproblem uns unser ganzes Leben lang geplagt hätte und wir die ersten Menschen seien, die den Beweis gefunden hatten. Es wird wohl keiner von uns je wieder dazu verleitet werden, daran zu zweifeln, dass es keine größte Primzahl gibt ...»
Wie sehr der «Stolz», den sie hier nennt, mit der Ehrfurcht verträglich ist, wird ausgesprochen in dem folgenden Satz eines heute Erwachsenen, eines Arztes, der in der Erinnerung an ein längst vergangenes, doch unvergessenes Unterrichtsgespräch über eben diesen Primzahlensatz schreibt:«... erinnere ich mich an mein Staunen, dass ein so unendlich schwieriges Problem mit so einfachen Mitteln gelöst werden konnte, und eine gewisse Erschrockenheit über die eigene Kühnheit.» Die Bildungsmacht der Mathematik scheint mir in diesem Satz sehr glücklich gefasst zu sein.