Primzahlen

Gleichmäßig schreitet die Reihe der Zahlen voran, eine um die andere, immer im gleichen Abstand und gleichmäßig gebündelt in Zehner, Hunderter, Tausender und so immer weiter. Es scheint nichts Gleichmäßigeres zu geben. Und doch ist das nur auf der Oberfläche so. Sobald man damit beginnt die Zahlen zu zerlegen, ihre Teilbarkeit und ihr Enthaltensein zu untersuchen, dann zeigen sich sofort Ähnlichkeiten und Eigentümlichkeiten, Verwandtschaften und Unterschiede, Unregelmäßigkeiten in den Beziehungen und in der Verteilung. Das gilt insbesondere für die Primzahlen. Ihr Vorkommen und ihre Abfolge erscheint voll von Widersprüchen und Rätseln. Es sind vor allem zwei Tatsachen, die zu denken geben: »Die eine ist, daß die Primzahlen, trotz ihrer einfachen Definition und Rolle als Bausteine der natürlichen Zahlen, zu den willkürlichsten, widerspenstigsten Objekten gehören, die der Mathematiker überhaupt studiert. Sie wachsen wie Unkraut unter den natürlichen Zahlen, scheinbar keinem anderen Gesetz als dem Zufall unterworfen, und kein Mensch kann voraussagen, wo wieder eine sprießen wird, noch einer Zahl ansehen, ob sie prim ist oder nicht. Die andere Tatsache ist viel verblüffender, denn sie besagt just das Gegenteil - daß die Primzahlen die ungeheuerste Regelmäßigkeit aufzeigen, daß sie durchaus Gesetzen unterworfen sind und diesen mit fast peinlicher Genauigkeit gehorchen« (Zaiger 1977, S. 4). Dies ist wohl auch der Grund, warum Martin Wagenschein meint, daß man in der Beschäftigung mit dem antiken Beweis des Euklid über das Nicht-Abbrechen der Primzahlen, erfahren könne, was es heißt, mathematisch zu denken. - Wilhelm Werner nimmt die Anregung Wagenscheins auf. Ähnlich wie bei Wagenschein steht im Mittelpunkt des Unterrichtsgeschehens nicht das Nachvollziehen eines Beweises, sondern das Finden einer Formel, die es erlaubt eine eigentümlich regel-unregelmäßige Erscheinung zu erfassen und ihr Erscheinen vorauszusagen. Dies ist ein Prozeß, der die Schülerinnen und Schüler offenbar gefangennimmt und der es ihnen ermöglicht, den autoritären Gestus mathematischer Bestimmtheit als eine aus Unbestimmtheit, Vermutung, Zweifel und eigenem Denken erwachsene Überzeugung anzunehmen. Der abschließende Hinweis auf die unterschiedlichen Bedingungen und Gegebenheiten einer additiven und einer multiplikativen Strukturierung der Zahlenreihe läßt eine umfassendere Gesetzmäßigkeit aufscheinen und führt hinein in weiterreichende Probleme der Zahlentheorie.
Vieles, was Wagenschein in seiner Vorlage nur andeutet - insbesondere die Voraussetzungen und der Einstieg - wird von Werner ausführlicher dargestellt. Und überhaupt wäre es im Sinne der Lehrkunst förderlich, Vorlage und Neuinszenierung auch in einzelnen Zügen vergleichen zu können. Im folgenden sei wenigstens der Beginn des Wagenscheinschen Aufsatzes hinweisend zitiert:

Der ebenso einfache wie geniale antike Beweis dafür, daß die Folge der Primzahlen niemals abbrechen kann, gehört zu den wenigen wirklich unentbehrlichen Stücken des mathematischen Lehrgutes. Ohne irgendwelche Vorkenntnisse vorauszusetzen, läßt er erfahren, was es heißt, mathematisch zu denken. Für die überhaupt dafür Empfänglichen ist das aktive Begreifen dieses souveränen Verfahrens ein unvergeßliches Erlebnis.

Der Beweis geht (in seiner heute üblichen Fassung) bekanntlich so vor, daß das Produkt aller Primzahlen hinauf bis zu irgendeiner, p, gebildet wird, und daß dann durch Hinzufügen der Eins eine Zahl entstehen muß,

$N=2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot p+1$,

die durch keine dieser Primzahlen teilbar sein kann. Wenn sie also nicht selber Primzahl ist, so kann sie nur solche Primfaktoren haben, die oberhalt von p liegen. Es gibt also in jedem Falle Primzahlen, die größer sind als p.

Das ist schnell gesagt und vom mathematisch Geübten auch leicht verstanden. Es dem Anfänger einfach zu erzählen hieße, das Kind auf den Berg hinauftragen, statt es ihn ersteigen zu lassen. Wie anders sieht es dann die Aussicht, tief atmend, durchblutet, mit weiten Augen. Nur wer die Höhe gewann, weiß, was Höhe ist.

Wie wenige mathematische Fragen ist dieses Problem geeignet, im aktiven Gespräch einer Gruppe errungen zu werden. Nur muß die Frage erst einmal gesehen werden, und dazu muß der Lehrer vieles sagen, ehe er dann schweigt, indem der eigentliche Unterricht beginnt. Er wird sehen lassen, wie die Abstände von Primzahl zu Primzahl sich immer mehr dehnen, wie sie (nicht ausnahmslos, doch im Durchschnitt) immer größer werden. Und das ist begreiflich: je größer eine Zahl ist, desto mehr andere, kleinere stehen unter ihr als Teiler für sie bereit. So sieht man die Lücken sich immer weiter dehnen, und es dämmert die Möglichkeit, daß es einmal mit den Primzahlen ganz aus ist, daß einmal keine mehr kommt, daß sie aussterben, daß es eine letzte, eine größte gibt.

Sezt man diese, recht intensiv so vorbereitete Frage in einen Kreis junger Menschen, so beginnt sofort ein Prozeß, der einer chemischen Reaktion verglichen werden kann in der Gesetzlichkeit seines Ablaufes. Schöner aber und tiefer erscheint der Vergleich mit dem Vorgang der Erinnerung, dem Gleichnis, das Platon gebraucht

(Menon). Denn es ist gerade so, als sei die Lösung insgeheim gegenwärtig, wie hinter dem Vorhang des Unbewußten, und setze sich langsam und in Stufen durch. Der Lehrer ist dabei unentbehrlich, doch nicht wie einer, der etwas stückweise preisgibt, sondern wie ein Agens, das die Leitungswege gleichsam ionisiert, auf denen das seelische Kollektiv kommuniziert: in sich selbst und mit dem geistigen Reich, in welchem die mathematischen Wahrheiten bestehen.

Wagenschein 1949

Wilhelm Werner

Eine Leiter bauen ins Unendliche

Euklids Primzahlenbeweis als zahlentheoretisches Exempel nach Wagenschein im Gymnasium Philippinum in Marburg

1. Vorbemerkung und Planung

Für Martin Wagenschein gehört der antike »Beweis zum Satz des Euklid über das Nichtabbrechen der Primzahlen« zu den wenigen wirklich unentbehrlichen Stücken des mathematischen Lehrgutes. An der Ecole d'Humanité in Goldern (Schweiz) läßt er diesen Beweis von einer Gruppe von 13 Schülerinnen und Schülern im Alter von 14 bis 17 Jahren nachentdecken. Das war 1949. Er hat darüber ausführlich berichtet (Wagenschein 1980, S. 228-236). Mich hat es gereizt, diesen Prozeß noch einmal fast fünfzig Jahre später mit Schülern eines Gymnasiums zu wiederholen.

Der Gegenstand des Beweises füllt im konventionellen Unterricht - falls er überhaupt behandelt wird - ein bis zwei Stunden. Dabei wird der Klasse der Beweis präsentiert. Diese vollzieht die einzelnen Schritte nach und lernt sie auswendig. Nach Wagenscheins eigenen Worten hieße das, das Kind den Berg hinauftragen, statt es ihn ersteigen zu lassen. Sein Anliegen ist es, die Beweisidee von den Schülern entdecken zu lassen. Im Protokoll zu seinem Unterricht schreibt Wagenschein, daß sehr viel davon abhängt, wie intensiv die Frage vorbereitet sei und wie das Problem präsentiert würde, damit die Schüler es als solches erleben. Die Aufgabe des Lehrers besteht danach darin, die »Leitungswege der Kommunikation zu ionisieren«, damit die Beweisidee sich im Gespräch immer mehr durchsetzt.

Die Entwicklung der Gedanken der Schüler wird in seinem Bericht präzise und spannend beschrieben. Doch gerade zu der so wichtigen Vorbereitung und Präsentation findet man dort nur knappe Andeutungen. Ich sah daher meine erste Aufgabe darin, diese Lücke zu füllen. Dabei tauchten Schwierigkeiten auf, die die Leichtigkeit und Eleganz der Darstellung in Wagenscheins Bericht nicht vermuten ließen: Welche Lerngruppe kommt in Frage? Welche Voraussetzungen sind dadurch gegeben, welche Vorbereitungen erforderlich? Wieviel Zeit ist für die Unterrichtseinheit einzuplanen? Wie bereite ich die Fragestellung vor? Und: Welche Präsentation zündet?

Primzahlen werden nach den Lehrplänen in Klasse 6 im Zusammenhang mit Teilbarkeit, Primfaktorzerlegung, größtem gemeinsamen Teiler, kleinstem gemeinsamen Vielfachen als Vorbereitung der Bruchrechnung und Dezimaldarstellung behandelt. Diese umfangreiche Stoffeinheit läßt die Bedeutung der Primzahlen für ein grundlegendes Verständnis der Mathematik, die natürlichen und rationalen Zahlen spürbar werden und damit die Frage, ob es endlich oder unendlich viele davon gibt, als wichtig erscheinen. Wird die Fragestellung in diesen Unterrichtszusammenhang eingebettet, ist dadurch schon viel an Hintergrund gegenwärtig. Dies hat mich dann auch bewogen, den ersten Durchgang für dieses Lehrstück in einer sechsten Klasse anzusiedeln. Um es vorwegzunehmen: Dieser Versuch kann als gescheitert betrachtet werden; doch dazu weiter unten.

Den zweiten Versuch unternahm ich dann ein Jahr später in einer Klasse acht. Hier versuchte ich den geschilderten Zusammenhang durch eine Wiederholung herzustellen. Und noch eine weitere Überlegung kam hinzu: Wagenschein schreibt, daß dieser Beweis »ohne irgendwelche Vorkenntnisse vorauszusetzen« erfahren lasse, was es heißt, mathematisch zu denken. Die Vorstellung, die ich durch seinen Bericht von dem Unterrichtsgespräch gewann, ließ mich allerdings daran zweifeln. Mir scheint, daß eine Reihe von Vorkenntnissen wie etwa die Teilbarkeitsregeln oder das Sieb des Erathostenes zum Herausfinden von Primzahlen nicht nur hilfreich sondern auch notwendig sind, sollen die Schüler gerüstet sein, Vermutungen, auf die sie im Zusammenhang des Beweises stoßen, selbst auf ihren Wahrheitsgehalt hin zu untersuchen. Um dafür nur ein Beispiel zu nennen:

An einer zentralen Stelle, die sich als solche sowohl bei Wagenschein als auch in meinem Unterricht herausstellte, ob nämlich 30031 eine Primzahl sei, muß Wagenschein selbst die Antwort geben, die etwas besser gerüstete Schüler auch selber hätten finden können. Und gerade dieses Rüstzeug liefert der beschriebene Zusammenhang. Ich habe die Wiederholung dann so gestaltet, daß sie eine Einübung und Einstimmung in die anderen Methoden dieser Unterrichtseinheit herstellt. Nicht nur der Inhalt (z. B. der Teilbarkeitsregeln) sondern vor allem dessen Begründung und die Darstellung der eigenen Gedankengänge dabei standen im Vordergrund. Als für meinen Unterricht besonders wichtige Vorkenntnisse haben sich dabei herausgestellt: Teilbarkeitsregeln, Primfaktorzerlegung (Fundamentalsatz der Zahlentheorie), Sieb des Eratosthenes, Primzahltafel. Als Zeitraum für die Unterrichtseinheit hatte ich drei Wochen (12 Unterrichtsstunden zu 45 Minuten) vorgesehen. Da der Stoff nicht für die Jahrgangsstufe acht vorgesehen ist, ergab sich die Schwierigkeit, diese Zeit im übrigen Mathematikunterricht einzusparen.

Meine eigene Vorbereitung bestand zunächst darin, Martin Wagenscheins Aufsatz zu lesen und die erwähnte Lücke zu füllen. Allerdings hatte ich eine gewisse Scheu, den zweiten Teil des Aufsatzes zu lesen, in dem das Unterrichtsgespräch beschrieben wird. Für mich bestand der Reiz des Unternehmens darin, die von Wagenschein im ersten Teil behauptete besondere Eignung dieses Themas, die Schüler mathematisches Denken erfahren zu lassen, selber zu testen. Dabei war es das Prozeßhafte, das fast zwangsläufige sich Durchsetzen des Beweises, was ich in der Klasse erleben wollte. Ich fürchtete, durch ein zu intensives Lesen so vorbereitet zu werden, daß ich diesen Prozeß durch ungeeignete, weil von außen kommende Interventionen stören würde. Ich war mir meiner Neigung, Schüler eher an kurzer Leine gehen zu lassen, und meiner Ungeduld im Lernprozeß der Schüler bewußt. All dies hoffte ich durch Enthaltsamkeit im Lesen, wenn schon nicht ganz vermeiden, so doch einschränken zu können.

Daher also die Haltung: je weniger ich über eventuelle Schwierigkeiten weiß, desto weniger vorbereitetes Krisenmanagement, desto mehr kann die Sache selbst zur Geltung kommen. Ich war mir allerdings im Klaren darüber, daß ich während des Unterrichtsgesprächs hell wach sein und mir und den Schülern Zeit lassen müßte, den Strom der Gedanken aufzunehmen und gegebenenfalls an geeigneter Stelle einen Damm zu bauen, der aber nicht zu einer Staumauer werden darf. Diese Haltung hat sicherlich viel dazu beigetragen, daß ich während des Unterrichtsgesprächs relativ offen war und auch häufig situationsgerecht reagieren konnte. Ich habe meine eigene Vorbereitung mehr als eine Einstimmung erlebt. Ich setzte mich noch einmal der Faszination aus, die Primzahlen während meines Studiums auf mich ausgeübt hatten, und las neben alten Mitschriften aus Vorlesungen zur Zahlentheorie auch einige Aufsätze zur Primzahlforschung. Daneben beschäftigte ich mich - auch im Rahmen unseres Lehrkunstprojekts - mit Martin Wagenscheins exemplarisch, genetisch, sokratischer Methode. Einige der Gedanken, die mir dazu kamen, möchte ich an dieser Stelle noch mitteilen:

»Primzahlen sind ein Kernstück der Mathematik«: Für einen Nichtmathematiker ist das Thema Primzahlen (PZn) eher ein Randgebiet der Mathematik, mit dem er allenfalls noch dunkle Erinnerungen an den Beginn seiner Schulzeit verbindet. Der Mathematiker sieht es anders. Über die Zahlentheorie, in deren Zuständigkeitsbereich die Primzahlen gehören, hat Carl Friedrich Gauß (1777-1855) gesagt, sie sei die »Königin der Mathematik«. Ich möchte hinzufügen: Die Primzahlen sind das Herzstück der Zahlentheorie. Sie sind die kleinsten, unteilbaren Bausteine der natürlichen Zahlen, gleichsam die Atome, aus denen sich die oft sehr komplexen Moleküle der weiteren Zahlentypen zusammensetzen.

Das alleine erklärt aber noch nicht die Faszination, die sie seit der Antike auf so viele Mathematiker ausgeübt haben. Das Eigentümliche, was bei ihrer Untersuchung auffällt, ist das Fehlen jeder sichtbaren Ordnung oder Gesetzmäßigkeit. So gibt es keine Formel, mit der man alle PZn berechnen könnte - zumindest ist sie bis heute nicht entdeckt, und die Hoffnung, sie zu finden, ist gering. Ihr Vorkommen unter den natürlichen Zahlen scheint ganz willkürlich und zufällig.

So gibt es z. B. zwischen 9.999.900 und 10.000.000 neun PZn, doch unter den nächsten hundert natürlichen Zahlen nur zwei (Beispiel aus Lehmer 1956). Mit dieser Unregelmäßigkeit im Sachverhalt korrespondiert der Umstand, daß in der Primzahl-Forschung sehr viele Fragen, die in ihrer Einfachheit von einem Schüler der Klasse 5 verstanden werden können, trotz jahrhundertelanger Forschung bis heute nicht befriedigend beantwortet wurden.

Zur Veranschaulichung möchte ich nur einige Beispiele nennen:

(1) Gibt es unendlich viele PZ-Zwillinge?
PZ-Zwillinge sind Paare von PZn, die nur durch eine gerade Zahl getrennt sind wie 5 und 7, 11 und 13, 17 und 19.

(2) Gibt es zu jeder natürlichen Zahl n zwischen n^2 und $(n+1)^2$ mindestens eine PZ?
Beispiel: $n = 3$; zwischen 3^2 und $(3+1)^2$ liegen die PZn 11 und 13.

(3) Läßt sich jede gerade Zahl als Summe zweier PZn schreiben (die berühmt-berüchtigte Goldbachsche Vermutung)
(4) Gibt es ungerade vollkommene Zahlen?
Eine Zahl heißt vollkommen, wenn die Summe ihrer Teiler gleich ihrem Doppelten ist. Beispiel: n + 6, 1+2+3+6 = 12.
(5) Gibt es unendlich viele PZn der Form p + 2q - 1, wobei q selbst PZ ist (Mersennesche PZn) oder $p = 2^{2^n} + 1$, wobei n eine natürliche Zahl ist (Fermatsche PZn)?

Ein Ansatz von Ordnung zeigt sich erst, wenn man die Primzahlen statistisch untersucht. So gibt die Funktion $n/\log^{(n)}$ zumindest für große Werte von n näherungsweise die Anzahl der PZn bis zur Zahl n an. Dies ist - grob formuliert - die Aussage des berühmten Primzahlensatzes, der zum ersten Mal von C. F. Gauß vermutet (um 1790) und von den französischen Mathematikern de la Vallée-Poussin und Hadamard etwa einhundert Jahre später bewiesen wurde. Mögen auch die Antworten auf die Fragen heute von geringerer Bedeutung für die Mathematik sein, so waren die Fragestellungen selbst für die Entwicklung vieler Bereiche der Mathematik weit über die Zahlentheorie hinaus von unschätzbarem Wert. Dies gilt besonders für die Algebra und die Analysis.

»Mathematik ist nicht autoritär«: Der zweite Aspekt betrifft die Schuldidaktik der Mathematik. Es geht ja in dem Lehrstück um einen Beweis. Welchen Stellenwert haben Beweise in der Mathematik und in ihrem Unterricht? Ein Beweis ist eine Kette logischer Schlüsse, die in der Regel bei der Voraussetzung beginnt und bei der Behauptung endet. Die Sätze der Mathematik müssen also nicht geglaubt werden im Sinne eines Für-Wahr-Haltens, sind einsichtig, verstehbar und ableitbar. Es gibt keine transzendente Autorität, die sich offenbart und Gehorsam gegenüber ihren Offenbarungen fordert. Leider vermittelt mancher Mathematikunterricht dem Schüler einen gegenteiligen Eindruck. Eine kleine Schar Auserwählter gelangt durch Unterwerfung ihres Geistes in den Besitz der kostbaren Wahrheit, während der größere Teil - will er sich nicht unterwerfen - weitgehend den Gehorsam verweigernd heulend und zähneklappernd vor den Toren des Paradieses bleibt, das ihm eher wie die Hölle vorkommt.

Nun ist der Beweis selbst noch kein Schutz gegen diesen als autoritär erlebten Anspruch, fällt er doch oft genau so vom Himmel wie der dazugehörige Satz, und auch er muß wie dieser, von einer Autorität ersonnen, hingenommen und gelernt werden. Dies kann erst aufgebrochen werden, wenn der Schüler selbst zum Entdecker der Zusammenhänge wird und damit Mathematik nicht als etwas passiv Hinzunehmendes, sondern als etwas Gewordenes und von ihm selbst Erschaffbares erlebt.

Das bedeutet nun natürlich nicht, daß die tausendjährige Mathematik von jedem Schulkind aufs Neue erfunden werden muß. Es ist ausreichend, es den Schüler exemplarisch an zentralen Inhalten der Mathematik erleben zu lassen. Daß es sich bei den Primzahlen um einen solchen zentralen Inhalt handelt, habe ich oben versucht darzustellen. Auch die Schüler können ihn als solchen im Rahmen der ihnen bekannten Mathematik erkennen.

Daß die Primzahlen geeignet sind, auch Schüler zu fesseln und eine Motivation zu erzeugen, die über viele Stunden trägt, hat mir die Durchführung der Unterrichtseinheit gezeigt. Ich glaube, daß die mit ihnen gemachten Erfahrungen das Selbstvertrauen der Schüler in ihre Leistungs- und Erkenntnisfähigkeit gestärkt haben und dies nicht nur im Fach Mathematik. Allerdings war dieser Weg zu mehr Autonomie verbunden mit vielen Irrwegen und Risiken, deren Überwindung aber den Wert des Erfolges um so größer macht. Dabei haben die Schüler einen Einblick in die Methode mathematischer Erkenntnisgewinnung erhalten, der Mathematik für sie ein Stück entmystifiziert hat. Damit, glaube ich, können sie nun Sätzen und Beweisen anders gegenübertreten und sie akzeptieren, auch wenn sie nicht in dieser Ausführlichkeit behandelt werden können.

An diese Stelle gehören nun aber noch einige Bemerkungen zum Scheitern des Versuchs in der Jahrgangsstufe sechs. Nach Behandlung des eingangs erwähnten Stoffbereichs einschließlich des Siebs des Erathostenes stellte - wie in Klasse acht - die Abstimmung über die Frage, ob es unendlich viele Primzahlen gebe, den Einstieg in den Beweis dar. Auch diese Klasse war sehr motiviert und engagiert, was in dem eifrigen Nachschlagen und Forschen in Lexika und Mathematikbüchern zu Hause zum Ausdruck kam. Die Lösungssätze waren sehr ideenreich und oft originell, mal mehr experimentell, spekulativ, mal logisch strenger und gut begründet. Die Schwierigkeiten bestanden aber darin, die Klasse (12 Mädchen, 12 Jungen) auf die Beiträge der einzelnen Klassenkameraden zu konzentrieren, um ein gemeinsames Voranschreiten zu erreichen. Den Anforderungen an geistiger Ausdauer und Disziplin waren die 11 und 12-jährigen Kinder trotz großer Motivation noch nicht gewachsen. Ein gemeinsames, konzentriertes Arbeiten war kaum länger als 15 Minuten pro Unterrichtsstunde möglich. Daher mußte ich mehr als vorgesehen eingreifen und führen. Als wir den Beweis dann schließlich doch zu Ende geführt hatten, waren es nur wenige, die den Aufstieg aus eigener Kraft geschafft hatten.

Fazit: Um an schwierigen Bergtouren teilnehmen zu können, müssen die Kinder auch ein gewisses Alter haben.

2. Unterrichtsgang

Ausgangssituation: Die Klasse 8 c (9 Mädchen, 13 Jungen) unterrichte ich seit eineinhalb Jahren in Mathematik. Nach anfänglichen Schwierigkeiten im Umgang miteinander haben wir inzwischen ein gutes Verhältnis entwickelt. Schwierigkeiten ergaben sich vor allem dadurch, daß ich die Klasse als sehr unselbständig beim Lösen mathematischer Probleme erlebte. Sie wollte bis in formale Einzelheiten festgelegte Lösungsrezepte, die ich ihr verweigerte. Sie fühlte sich verunsichert, meinte den Boden unter den Füßen zu verlieren und grollte mir. Dies änderte sich erst gegen Ende des ersten Halbjahres, als die Klasse zunehmende Bereitschaft zeigte, sich auf eigene Gedanken einzulassen, Alternativen zu Lösungsansätzen zu diskutieren und in dieser neuen »Freiheit« eine gewisse Sicherheit gewann. Einen wesentlichen Anteil daran hatte eine umfangreiche Unterrichtseinheit »Geometrie«, in der es u. a. darum ging, selber geometrische Sätze zu entdecken und Wege zu ihrem Beweis zu finden. Daß die Kinder daran eine gewisse Freude und Befriedigung empfunden hatten, zeigte die häufig auftauchende Frage: »Wann machen wir denn endlich wieder Geometrie?« Leider mußten wir uns aber nach Vorgabe des Stoffplans durch mehrere Kapitel »Algebra« (Gleichungen, Termumformungen, Einemische Formeln) beißen, wobei meine eigene Unlust auch auf die Schüler abfärbte. Daher wurde meine Ankündigung, zwischendurch mal etwas ganz anderes zu machen, was dazu nicht einmal in einer Arbeit abgeprüft werden sollte, mit Erleichterung aufgenommen.

Dazu war jedoch zunächst eine Wiederholung des in der Klasse 6 behandelten Stoffes (Teiler, Teilbarkeit, Primzahlen (PZn), größter gemeinsamer Teiler (ggT), kleinstes gemeinsames Vielfaches (kgV)) erforderlich. Hauptziel dieser Wiederholung war es, die Bedeutung der Primzahlen als nicht weiter zerlegbare Bausteine der natürlichen Zahlen wieder oder neu bewußt zu machen. Der arithmetische Teil des Stoffes der Klasse 6 - neben den oben genannten Begriffen vor allem die Bruchrechnung und das Rechnen mit Dezimalzahlen - war ja weitgehend bestimmt vom Umgang mit Primzahlen. So z. B. das Erweitern und Kürzen, Bestimmung des Hauptnenners bei der Addition und Subtraktion der Brüche oder die Entscheidung, ob ein Bruch einer abbrechenden oder periodischen Dezimalzahl entspricht. Darin sah ich den Weg, das spätere Problem: » Gibt es unendlich viele Primzahlen?« den Schülern so vorzustellen, daß sie seine Lösung als bedeutsame Aufgabe erleben und vielleicht davon gepackt werden konnten. Martin Wagenschein sah ja gerade in der Präsentation der Fragestellung die entscheidende Weichenstellung für das Gelingen dieses Unterrichtsvorhabens. Darüberhinaus sollte in dieser vorbereitenden Phase das Denken der Schüler aufgelockert werden, um es wieder offen zu machen für das Selberentdecken und Argumentieren. Daher werden einzelne Themen wie etwa die Teilbarkeitsregeln, die für das spätere Problem keine oder nur eine untergeordnete Rolle spielen, ausführlicher behandelt.

Ich stelle diese erste Phase, die vier Unterrichtsstunden umfaßt, nur sehr knapp und summarisch dar.

Vorspiel: Vier Stunden Vorbereitung: An die Wiederholung des Begriffs »Teiler« schloß sich eine Zusammenstellung der wichtigsten Teilbarkeitsregeln an. Die gängigeren unter ihnen waren den Schülern noch recht gut in Erinnerung. Warum diese Regeln gelten, war ihnen jedoch nicht klar. Daher versuchten wir, sie für einige Zahlen zu beweisen. Schnell sahen die Schüler ein, daß es bei der Teilbarkeit durch 2 nur auf die letzte Ziffer einer Zahl ankommt, da ja die Zehner, Hunderter und Tausender sowieso durch 2 teilbar sind. Dieses Begründungsschema konnten sie dann auch recht schnell und weitgehend selbständig auf die 4 und die 8 übertragen. Da alle Hunderter und Tausender durch 4 teilbar sind, braucht man also nur die Zahl, die von den letzten beiden Ziffern der Zahl gebildet wird, auf Teilbarkeit durch 4 zu untersuchen.

Die Schüler formulierten dann auch Regeln für 16 und 32, sahen aber auch ein, daß diese wegen ihres großen Rechenaufwands nur von geringem praktischen Wert sein würden. Dieser Beweisansatz führte auch bei 5, 10, 100 usw. zum Erfolg. Schwieriger wurde es bei der 3. Was die Quersumme einer Zahl mit ihrer Teilbarkeit durch 3 zu tun haben sollte, lag im völligen Dunkel. Erst, als wir genauer hinschauten, stellten wir fest, daß auch hier die Zehner, Hunderter usw. eine Rolle spielten. Beim Teilen der 10 durch 3 blieb ein Rest von 1, ebenso bei 100 und 1000. Wenn man also bei der Zahl 485 jeden der 4 Hunderter durch 3 teilt, bleiben 4 Einer als Rest, ebenso 8 Einer bei den Zehnern; dann gab es noch die 5 Einer der Zahl. Es war dann allen schnell klar, daß es auf die Summe der bei diesem Aufteilungsvorgang entstandenen Reste ankam. Einige fanden dann auch selbst heraus, daß es bei der 9 genau so funktioniert.

Neue Schwierigkeiten tauchten dann bei der Teilbarkeit durch 6 auf. Die bekannten Ansätze versagten. Eine neue Idee mußte her. Der erste Vorschlag: »Eine Zahl ist durch 6 teilbar, wenn sie durch 3 teilbar ist.« erwies sich als nicht haltbar. Es war ja nur jede zweite Zahl der 3er Reihe durch 6 teilbar, und das waren alles gerade Zahlen. Damit war klar, daß es auch auf die 2 ankommt, und wir konnten jetzt formulieren: »Eine Zahl ist durch 6 teilbar, wenn sie durch 2 und durch 3 teilbar ist. « Dies schien sehr vielversprechend für Verallgemeinerungen zu sein, so etwa für die 12: »Eine Zahl ist durch 12 teilbar, wenn sie durch 3 und 4 teilbar ist.« ($12=3\cdot 4$). Dieser

Vorschlag wurde an der 12er Reihe überprüft und als richtig befunden. Auch bei 24=3·8 oder 48=3·16 konnten die entsprechenden Regeln bestätigt werden. Für die Schüler überraschend war, daß sie bei 12=2·6 versagte. Der Grund dafür war auch ohne meine Hilfe bald gefunden. Ein Schüler bemerkte, daß die Teilbarkeit durch 6 die durch 2 schon beinhaltet.
Die Regel: »Eine Zahl ist durch 12 teilbar, wenn sie durch 2 und 6 teilbar ist,« besagt dann: »Eine Zahl ist durch 12 teilbar, wenn sie durch 6 teilbar ist.« Daß dies nicht stimmen kann, wurde durch einige Gegenbeispiele belegt. Dabei entstand dann die Frage, unter welchen Bedingungen das folgende Regelschema zu einer richtigen Regel führt: »Eine Zahl ist durch d (d = a·b) teilbar, wenn sie durch a und durch b teilbar ist. « Nach längerer Diskussion und Untersuchung einiger Beispiele fand ein Schüler heraus, daß das kgV (a, b) gleich dem Produkt von a und b sein muß. Dies bedeutet, daß a und b teilerfremd sein müssen oder anders ausgedrückt, der ggT (a, b) ist 1. An dieser Stelle wurden dann die Begriffe kleinstes gemeinsames Vielfaches und größter gemeinsamer Teiler wiederholt und an einigen Beispielen deren Berechnung mit Hilfe der Teiler- bzw. Vielfachmengen geübt. Dabei erinnerten sich einige Schüler daran, daß man das ja auch mit Primzahlen machen kann.

Auf meine Frage, was dies denn für Zahlen seien, wurden die Primzahlen 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31 aufgezählt. Auf Nachfragen wurde dann die Definition der Primzahl aus der Versenkung gehoben: »Eine Zahl heißt Primzahl, wenn sie nur durch sich selbst und durch 1 teilbar ist. « Meine Frage, ob wir denn bei der Aufzählung vielleicht eine vergessen hätten, führte zu eifrigem Suchen; die 2 wurde aber nicht entdeckt. Erst als ich nach ihr fragte, war der Klasse klar, daß sie nach unserer Definition auch zu den Primzahlen gehört. Als einzige gerade Primzahl sieht sie eben nicht so prim aus. Dann kam aber schnell die Feststellung, daß wir dann auch die 1 zu den Primzahlen rechnen müßten. Ich erklärte, daß die Mathematiker vereinbart hätten, die 1 nicht zu den Primzahlen zu zählen. Da sie als Faktor beliebig oft zu einem Produkt hinzugenommen werden kann, ohne etwas zu verändern, würde sie nur Verwirrung stiften.

»Was ist denn das Besondere an den Primzahlen?« Diese Frage beseitigte offenbar bei vielen Erinnerungsschranken. Primfaktorzerlegung, Hauptnenner usw. wurden genannt.

Zum ersten Begriff wählte ich als Beispiel die 48.

$48 = 3\cdot6 = 3\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2 = 2^4\cdot3$

Die Frage, ob man denn bei einem anderen Anfang der Zerlegung zu anderen Primfaktoren komme, führte zu folgendem Tafelbild:

48	$= 3\cdot16$	=	$= 3\cdot2\cdot 8$	$= 3\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2$
	$= 2^4\cdot3$			
48	$= 2\cdot24$	$= 2\cdot2\cdot12$	$= 2\cdot2\cdot2\cdot6$	$= 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3$
	$= 2^4\cdot3$			
48	$= 6\cdot8$	$= 2\cdot3\cdot2\cdot4$	$= 2\cdot3\cdot2\cdot2\cdot2$	
	$= 2^4\cdot3$			
48	$= 4\cdot12$	$= 2\cdot2\cdot3\cdot4$	$= 2\cdot2\cdot3\cdot2\cdot2$	
	$= 2^4\cdot3$			
48	$= 1\cdot48$	$\surd= 1\cdot2^4\cdot3$		
	$= 2^4-3$			

Dies wurde noch an einigen anderen Beispielen durchgeführt. Mit welchem Produkt man auch immer beginnt, es kommen im Endeffekt immer dieselben Primfaktoren heraus, und wenn alle Faktoren Primzahlen sind, geht die Zerlegung nicht mehr weiter. Primzahlen sind also die unteilbaren Bausteine aller natürlicher Zahlen, in denen sie mehr oder weniger versteckt enthalten sind.

Ich notiere dann das Ergebnis an der Tafel: Jede natürliche Zahl läßt sich eindeutig (bis auf die Reihenfolge der Faktoren) als Produkt von Primzahlen schreiben. An dieser Stelle gehe ich noch einmal auf die Diskussion über die 1 als Primzahl ein. Würde man sie nämlich zu diesen zählen, wäre die Darstellung der natürlichen Zahlen als Primzahlprodukte nicht mehr eindeutig. Aus der Primfaktorzerlegung einer Zahl ließen sich jetzt auch recht übersichtlich alle Teiler dieser Zahl bestimmen. In der ersten Stufe waren es die Primfaktoren selbst, in der zweiten die Produkte je zweier Primfaktoren usw. An diese Überlegung schlossen sich Übungen zur Bestimmung von kgV und ggT mit Hilfe der Primfaktoren an. Schwerpunkt dabei war, welche der Primfaktoren wie oft in das kgV und den ggT aufgenommen werden müssen.

Hierzu ein Beispiel: Für die Zahlen 24 und 30 sollen der größte gemeinsame Teiler und das kleinste gemeinsame Vielfache bestimmt werden.

$24 = 2^3 \cdot 3$
$\underline{30 = 2 \cdot 3 \cdot 5}$
ggT $2 \cdot 3 = 6$
kgV $2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$

Zur Begründung der Vorgehensweise: Da der ggT Teiler beider Zahlen sein soll, kann er nur solche Primfaktoren enthalten, die in beiden Zerlegungen vorkommen, und zwar so oft, wie sie mindestens in einer Zerlegung auftreten.

Das kgV muß durch beide Zahlen teilbar sein. Daher müssen alle Primfaktoren in seiner Zerlegung so oft auftreten, wie sie höchstens in einer der Zerlegungen vorhanden sind. Als Abfallprodukt erhielten wir, daß das Produkt aus kgV und ggT gleich dem Produkt der Zahlen selbst sein muß. Damit war dann auch der Bogen zu unserem Teilbarkeitsschema geschlagen. - Denn nun konnten wir weiter folgern, daß die Bedingung, kgV und Produkt zweier Zahlen stimmen überein, genau dann erfüllt ist, wenn der ggT 1 ist.

Am Ende unserer Wiederholung wies ich die Klasse noch einmal darauf hin, wie die ganze Bruchrechnung von den Primzahlen durchdrungen ist. Ich glaube, daß die Schülerinnen und Schüler nun zumindest erahnten, wie die Beziehungen zwischen den Zahlen durchsichtiger werden, wenn man deren Primbausteine kennt.

In dieser Woche der Vorbereitung auf das eigentliche Problem zeigte sich schon eine deutliche Veränderung im Arbeitsverhalten der Klasse gegenüber der vorangegangenen Unterrichtseinheit »Algebra«. Die Beteiligung war wesentlich besser gewesen, und die Hausaufgaben, die meist sehr offen gestellt waren, zeigten, daß eher als weniger gearbeitet worden war.

Montag, 21.1., 6. Stunde: Einstimmung und Abstimmung. Gibt es unendlich viele Primzahlen? Die zweite Woche begann mit einer Unterbrechung. Da wir kurz vor dem Ende des ersten Schulhalbjahres standen, mußten die Noten besprochen werden. Dies konnte ohne große Konflikte schon nach 20 Minuten abgeschlossen werden.

Ich machte die Klasse noch einmal darauf aufmerksam, daß es für die Arbeit der vergangenen Woche wichtig gewesen sei, die Beiträge aller ernst zu nehmen, gut zuzuhören, um diese richtig beurteilen und angemessen darauf reagieren zu können. Das sei bestimmt dann nicht einfach, wenn man eigene Ideen und Argumente habe, die man gerne einbringen möchte. Doch könnten wir gemeinsam nur dann weiterkommen, wenn wir alle bereit seien, aufeinander zuzugehen. Dies sei für die künftige Arbeit noch wichtiger als bisher, weil wir wie richtige Mathematiker ein Problem lösen wollten, wobei gerade auch falsche Ansätze hilfreich und förderlich sein könnten. Nach dem Hinweis, daß wir in den vergangenen Stunden gesehen hätten, welche Rolle die Primzahlen in der Mathematik spielten, kam ich endlich zu des Pudels Kern.

»Was meint ihr, gibt es unendlich viele davon oder hören sie irgendwo auf? «

Nach einer kurzen Pause versuchten sich die meisten untereinander in der Klasse zu verständigen. Die Unruhe, die entstand, zeigte mir, daß die Meinungen kontrovers ausfielen. Wir stimmten ab:

für unendlich viele: 10; dagegen: 10. Die zwei Enthaltungen meinten, eine längere Bedenkzeit zu benötigen.

Das Ergebnis überraschte mich, da im Durchgang des vergangenen Jahres in einer Klasse 6 nur zwei Gegner der Unendlichkeit aufgetaucht waren. Es war mir als Ausgangspunkt unserer Primzahlenexpedition aber sehr recht. Die Hausaufgabe bestand darin, Argumente für seine Position zu finden. Ich war gespannt auf die nächste Stunde.

Dienstag, 22.1., 5. Stunde: Die ersten Argumente. Der Keim des Euklidschen Ansatzes wird erkennbar.

»Na, was habt ihr euch überlegt?«

Nahezu die ganze Klasse meldete sich. Zunächst wollten aber die beiden Enthaltungen von gestern noch mitteilen, daß sie sich für endlich viele Primzahlen entschieden hätten. Dann ist Steffi dran. Sie ist für endlich viele: »Die Primzahlen werden immer seltener, je höher man geht. Deshalb müssen sie irgendwann aufhören.

Claas dagegen: »Das muß nicht so sein. Sie werden zwar dünner, aber es ist z. B. denkbar, daß zwischen Tausend und einer Million 3 Primzahlen liegen und zwischen einer Million und einer Milliarde wieder 3 usw.«

Malte: »Nein, man hat auch bei endlich vielen Primzahlen genug, um alle Zahlen damit zu erzeugen. Deshalb wird es eine Grenze für die Primzahlen geben.«

Renate: »Große Zahlen haben viele Teiler; daher ist es unwahrscheinlich, daß sie nur sich selbst und die 1 als Teiler haben.« Die übrigen Argumente stimmten inhaltlich im wesentlichen mit den hier aufgeführten überein. Sie waren jedoch alle nicht geeignet, die jeweilige Gegenseite zu überzeugen.

Dann kommen zwei konstruktive Vorschläge. Gunter vermutet, man müsse Primzahlen erzeugen können. Mit 59 sei auch 159 eine Primzahl. Irgendwie müßte man diese Reihe fortsetzen, so daß immer größere Primzahlen entstehen. Damit sei dann klar, daß es unendlich viele gibt. Dies leuchtet vielen ein; inzwischen hat jedoch jemand festgestellt, daß 159 keine Primzahl ist. Sie ist durch 3 teilbar.

Das ist nicht weiter schlimm, denn Claas meint eine Reihe gefunden zu haben, die geht: 1001, 10001, 100001, ... Seine Begründung, warum es sich um Primzahlen handeln soll, ist erstaunlich und richtungsweisend. Man müsse nämlich ausschließen, daß die Zahlen durch 2 und 3 teilbar seien, und das sei ja hier der Fall. (Genau diese beiden kleinsten Primzahlen hatte auch der Schüler Peter im Blick, als er in Wagenscheins Primzahlgespräch in Goldern seinen Ansatz, alle PZn müßten die Gestalt 6n+1 haben, begründete.)

Nicht alle haben ihm so schnell folgen können. Es herrscht ein bißchen Goldgräberstimmung; die meisten wühlen auf ihrem eigenen Claim. Daher dauert es eine Weile, bis sich alle auf Claas' Vorschlag einlassen können. Seine Zahlen werden noch einmal auf Teilbarkeit durch 2 und 3 untersucht. Es stimmt. Das ist der Beweis!?

Ich frage, ob es denn ausreiche, nur die Teilbarkeit durch 2 und 3 auszuschließen. Nach einiger Zeit ist klar, daß ja auch 5, 7 oder 11 Teiler sein könnten. Die Überprüfung durch 5 geht schnell, bei der 7 muß schon etwas gerechnet werden, erst recht bei der 11. Diese Rechnung bringt eine Enttäuschung: 1001 ist durch 11 teilbar und damit keine Primzahl.

Björn, Claas' Nachbar, mag sich damit nicht abfinden. Er hat festgestellt, daß 10 001 nicht durch 11 teilbar ist und meint, es müsse ja nicht jede Zahl der Reihe Primzahl sein. Vielleicht sei es ja nur jede zweite oder dritte oder es sei so, daß die Abstände der Primzahlen in der Folge immer größer würden.

Ich fasse das in dieser Stunde Erreichte zusammen. Die Klasse soll zu Hause diese Vermutung oder ähnliche weiter untersuchen. Ich bin mit dem bisherigen Verlauf sehr zufrieden. Die Präsentation des Problems hat gezündet, und die Qualität der Beiträge hatte mich positiv überrascht. Die Grundidee des Beweises, daß bei den Primzahlen die Teilbarkeit durch alle kleineren Primzahlen ausgeschlossen werden muß, zeichnete sich ab, auch wenn sie noch nicht in der konstruktiven Form des Euklidischen Ansatzes formuliert worden war. Diese wurde dann aber in der nächsten Stunde auf eine mir gar nicht genehme Weise ins Spiel gebracht.

Der zweite Teil der Stunde hatte gezeigt, daß viele Gedankengänge durch zeitaufwendige Rechnungen unterbrochen werden mußten, um festzustellen, ob es sich bei einer Zahl um eine Primzahl handelt. Ich nahm mir daher für die nächste Stunde vor, jedem Schüler eine Primzahlen Tafel zu geben und deren Zustandekommen durch das Sieb des Eratosthenes zu erläutern. Dabei liefert der Sieb-Algorithmus noch die für die Praxis wichtige Einsicht, daß man bei der Bestimmung der Primzahlen bis zu einer Zahl N nur die Primzahlen die kleiner sind als √ N, durchprobieren muß.

Mittwoch, 23.1., 4. Stunde: »Import« und eigene Leistung. Die »Lexikonfalle« und das Sieb des Eratosthenes: Die Stunde beginnt für mich mit einer unangenehmen Überraschung. Einige Schüler haben in Lexika nachgeschlagen: Es gibt unendlich viele Primzahlen: - Die Luft ist zunächst raus.

Die meisten hatten in ihrem Lexikon viel Unverständliches gelesen, vor allem, was die dort beschriebenen Beweise betrifft. Bernhard hatte deswegen sogar jemanden befragt und schildert den Beweis so: Man nimmt an, es gibt nur endlich viele Primzahlen, z. B. nur die bis zur 7. Dann ist die Zahl $2\cdot3\cdot5+1 = 31$ (also das Produkt aller kleineren PZn plus 1) wieder eine PZ. Offenbar war ihm der indirekte Ansatz des Beweises nicht klar.

Die Klasse steht Bernhards Ausführungen zunächst verständnislos gegenüber. Welche Rolle spielt z. B. die 7? Nach längerer Diskussion setzt sich bei der Mehrzahl der Schüler die Auffassung durch, wir hätten mit dem Ansatz

$$2\cdot3\cdot5+1 = 31$$
$$2\cdot3\cdot5\cdot7+1 = 211$$
$$2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11+1+2311$$
$$\text{usw.}$$

eine Formel gefunden, mit der man Primzahlen konstruieren kann, so wie wir das in der vergangenen Stunde mit der Folge 1001, 10001, . . . versucht hatten. Es wird sich herausstellen, daß es auch so nicht geht.

Ich bin durch diese Entwicklung irritiert. Soll ich mich auf diesen schnellen Weg einlassen? Ich entscheide mich für den von mir vorgesehenen Verlauf der Stunde. Ich erzähle den Schülern aber noch, daß der von Bernhard geschilderte Beweis von dem griechischen Mathematiker Euklid stamme. Dieser habe ihn vor etwa 2300 Jahren entdeckt. Wir seien aber auf dem besten Wege, ihn selbst zu finden. Dazu wollte ich ihnen noch etwas Rüstzeug zur Verfügung stellen, mit dem sie schneller entscheiden könnten, ob eine Zahl Primzahl ist oder nicht. Einige Schüler bestätigen, daß genau dies für sie bei den Hausaufgaben das Problem gewesen sei.

Ich schrieb die Zahlen von 1 bis 1000 in einem quadratischen Schema an die Tafel und ließ die Schüler dies in ihr Heft übertragen. Ich erzählte ihnen, daß dieses Verfahren von dem griechischen Mathematiker Eratosthenes entwickelt worden sei und daß dieser damit die Primzahlen aus den übrigen natürlichen Zahlen »herausgesiebt« habe. Dabei sei er so vorgegangen: Zunächst werde die 1 gestrichen, da sie keine Primzahl sei. Die 2 ist Primzahl, sie bleibt stehen. Aber alle Vielfachen der 2 werden gestrichen. Die nächste Zahl ist die 3. Da sie Primzahl ist, wird sie selbst nicht gestrichen, dafür aber alle ihre Vielfachen, da die ja durch 3 teilbar sind und damit keine Primzahlen sein können. Die nächste nicht gestrichene Zahl ist die 5, eine Primzahl. Sie muß es auch sein, da sie ja sonst als Vielfaches von 2 oder 3 schon gestrichen sein müßte. Ihre Vielfachen können keine Primzahlen sein und werden daher gestrichen usw.

Wir machen uns nun an die Arbeit und beginnen zu streichen. Die gefundenen PZn schreiben wir noch einmal rechts neben die jeweilige Zeile heraus.

Sieb des Eratosthenes

Auf meine Frage, bis zu welcher PZ wir deren Vielfache hätten streichen müssen, wurde erstaunt festgestellt, daß wir ja schon bei der 7 aufgehört hätten. Eine längere Diskussion ergab, daß z. B. die Vielfachen von 11 oder 13 oder größerer Primzahlen schon gestrichen sein müßten. Wäre dies nicht der Fall, hätte man ja Faktoren x erhalten, deren Produkte 11x, 13x, . . . größer als 1000 hätten sein müssen. Da dies den meisten in der Klasse noch unklar war, untersuchten wir noch mehrere Beispiele eines verwandten Problems.

Ich ließ die Klasse die Teilermengen einiger Zahlen bestimmen. Dabei stellten wir fest, daß Teiler immer paarweise auftreten. Bei der Zahl 78 war mit 2 auch 39 Teiler. Wir schrieben in der Teilermenge jeweils beide Partner auf und begannen mit 1 und 78.

$$T_{78}=\{1,2,........:.,39,78\}$$

Mit jedem kleinen Teiler erhielten wir so auch einen großen, der alleine nicht so leicht gefunden werden kann. Wir probierten nun systematisch weiter und erhielten mit der 3 auch 26 und trugen beide in die Menge ein.

$$T_{78}=\{1,2,3,..........,26,39,78)$$

Unter Verwendung der Teilbarkeitsregeln stellten wir fest, daß 4 und 5 nicht passen. Da aber 2 und 3 Teiler sind, muß dies auch für die 6 gelten. Ihr Partner ist 13. Beide wurden eingetragen.

$$T_{78}=\{1,2,3,6,....13,26,39,78\}$$

Weiteres Suchen führte uns bis zur 13, ohne daß wir neue Teiler entdeckten. Ich fragte, ob es denn noch mehr Teiler geben könnte. Nach einer längeren Pause des Nachdenkens wurde klar: Gäbe es einen noch nicht gefundenen Teiler größer als 13, dann hätte ja sein Partner unter den Zahlen von 1 bis 13 gewesen sein müssen, da ja die »kleinen« Teiler immer größer, die »größeren« aber immer kleiner werden, bis sie sich irgendwo in der »Mitte« treffen. Aber was ist die »Mitte«?

Darüber wurden nur einige Vermutungen geäußert, die wir an anderen Beispielen untersuchten, ohne aber zu einem befriedigenden Ergebnis zu kommen. Am hartnäckigsten hielt sich die Ansicht, der Treffpunkt von »kleinen« und »großen« Teilern sei die Hälfte der Zahl, obwohl alle Beispiele zeigten, daß er deutlich darunter liegen müsse. Die multiplikative Struktur der Teiler war vielen noch nicht klar.

Dann wählte ich als weitere Beispiele 81 und 100.
Ihre Teilmengen waren schnell bestimmt.

$$T_{81}=\{1,3,9,(9)\text{-}27\text{-}81\}$$
$$T_{100}=(1, 2, 4, 5, 10, (10), 20, 25, 50, 100)$$

Hier konnten wir den Treffpunkt sofort angeben, und es war auch schnell klar, worum es hier ging. Beides waren nämlich Quadratzahlen; der Treffpunkt war die Zahl, deren Quadrat wir gerade untersuchten. Nun übertrugen wir unser Ergebnis auf die Nichtquadratzahlen und dies wiederum auf die Siebproblematik. Unser Resultat formulierten wir dann in mehreren Anläufen und ich schrieb schließlich an die Tafel: Handelt es sich bei der Zahl N, bis zu der die Primzahlen zu suchen sind, um eine Quadratzahl, braucht man nur die Vielfachen der Primzahlen zu streichen, die kleiner als $\sqrt{N}$ sind. Ist N keine Quadratzahl, nimmt man die Wurzel der nächst kleineren Quadratzahl.

Ich beende die Stunde mit dem Verteilen der Primzahlen Tabelle (siehe 5.153, Lehmer 1914). Ich war unzufrieden mit mir, da ich aus der Erfahrung des vergangenen Jahres beim Durchgang in der Klasse 6 auf diese »Lexikonfalle« hätte vorbereitet sein müssen.

Donnerstag, 24.1., 6. Stunde: Neue Hoffnung und Enttäuschung. Der vielversprechende Ansatz scheitert: Zu Beginn der Stunde zeigen sich einige Schüler erstaunt darüber, daß es so viele Primzahlen gibt. Sie hatten sich die Tabelle zu Hause angesehen. Diese enthält die ersten 2500 Primzahlen, und die 2500ste ist 22307. Einige hatten versucht, eine Ordnung zu finden und waren durch die Unregelmäßigkeit der Primzahlen verwirrt. Die Tafel zeigte lediglich, daß deren Dichte nach größeren Zahlen hin abnimmt, daß dies aber viel langsamer geschieht, als die Schüler sich das vorgestellt hatten.

Überraschend war auch das Auftreten von Primzahlzwillingen, d. h. von Primzahl-Paaren, die sich nur um 2 unterscheiden - wie z. B. 11 und 13, 17 und 19. Ich erzählte den Schülern, daß sich die Mathematiker schon seit vielen hundert Jahren mit diesen Primzahl-Zwillingen beschäftigten, bis heute aber noch nicht herausgefunden hätten, ob es unendlich viele davon gibt. Gerade das Chaos bei den Primzahlen habe die Mathematiker seit vielen Jahrhunderten immer wieder fasziniert; dennoch seien sehr viele Fragen noch immer unbeantwortet. Andere Schüler hatten sich mit Bernhards Beweis beschäftigt und mit Hilfe der Tabelle herausgefunden, daß die von uns mit diesem Ansatz errechneten Zahlen 31, 211, 2311 tatsächlich Primzahlen sind. Dies führte uns wieder zu unserem ursprünglichen Problem zurück.

Ich wies die Klasse darauf hin, daß wir in der vorletzten Stunde schon ganz und nahe an diesem Ansatz gewesen seien. Nach längerem Gespräch wurde klar, daß wir zum Nachweis einer Primzahl ausschließen mußten, daß sie durch alle kleineren Primzahlen teilbar ist. Durch welche Primzahlen seien denn Bernhards Zahlen bestimmt nicht teilbar? Diese wurden an die Tafel geschrieben. Daran wurde klar, daß diejenigen Primzahlen, die an der Erzeugung der Zahl beteiligt sind, keine Teiler sein können, da beim Teilen durch sie immer der Rest 1 bleibt.

Um den roten Faden wieder sichtbar werden zu lassen und unseren Standort im Beweisgang zu bestimmen, fragte ich: »Was wäre gewonnen, wenn die Vermutung stimmt, daß es sich bei allen von Bernhards Zahlen um Primzahlen handelt?«

Mehrere Schüler meldeten sich spontan: »Das ist dann der Beweis.« Die Begründung, daß wir auf diese Weise immer größere Primzahlen erhalten und mit diesen wieder neue, größere leuchtete allen ein. Ebenso war klar, daß wir für einen vollständigen Beweis nur noch sicherstellen mußten, daß alle der oben konstruierten Zahlen Primzahlen sind.

Wir gingen erneut an die Arbeit: $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031$

Die Primzahl Tabelle half nicht weiter, da sie nur Primzahlen bis 22307 enthält. Zunächst klärten wir, bis zu welcher Primzahl wir unsere Zahl auf Teilbarkeit untersuchen mußten. Nach eifrigem Suchen und mehreren Fehlschlägen fanden wir die 173, da $173^2 = 29929$ kleiner, aber $179^2 = 32041$ größer als 30031 war. Die Primzahlen bis 173 verteilte ich an alle Schüler, so daß jeder etwa zwei Primzahlen erhielt, für die er feststellen sollte, ob sie Teiler von 30031 sind. Alle erwarteten, daß wir keine Teiler finden würden. Nach längerem Rechnen und Verrechnen überall Fehlanzeige. Astrid, eine gewissenhafte und zuverlässige Schülerin, hatte die 59 zu überprüfen. Aber - sie hatte sich verrechnet. Ich rechne an der Tafel vor, daß 59 Teiler von 30031 ist. Zunächst Ungläubigkeit - aber die Rechnung stimmte. 30031 ist das Produkt der beiden Zahlen 59 und 509, beides PZn.

Mit dieser erneuten Enttäuschung mußten wir unsere Bemühungen unterbrechen. In den folgenden Tagen fanden Projekttage statt und daran schloß sich eine viertägige Pause wegen des Halbjahreswechsels an.

Montag, 4.2., 2. Stunde: Das Feuer ist nicht erloschen. Die Wiederholung: Ich ließ die Klasse berichten, woran sie sich bei unserem Primzahl-Beweis erinnern konnten. Einiges wurde dabei noch einmal ausführlicher durchgesprochen und einige Mißverständnisse konnten ausgeräumt werden. Die Beiträge zeigten, daß die Erinnerungen noch sehr frisch waren, und der rote Faden von der Klasse gesehen wurde. In dieser Auffassung wurde ich vor allem durch die Beiträge der sonst eher schwächeren Schüler bestärkt, die die Hauptlast der Wiederholung zu tragen hatten. Am Ende der Stunde war der Stand vor unserer Unterbrechung wieder gegenwärtig. Ich schloß mit der Frage, was uns denn unsere letzte Rechnung 30031 = 59 - 509 gebracht habe. Unsere Vermutung sei ja dadurch widerlegt, ob wir aber trotzdem mit den Trümmern noch etwas anfangen könnten.

Dienstag, 5.2., 4. Stunde: Glück im Unglück. Scheitern als Voraussetzung des Erfolgs: Einigen war zu Hause aufgefallen, daß die Primfaktoren von 30031- 59 und 509 - ja größer sind als alle zu ihrer Konstruktion verwendeten. »Hilft uns das weiter?«, fragte ich.

Ich schreibe an die Tafel:

$2 \cdot 3+1 = 7$ PZ
$2 \cdot 3 \cdot 5+1+31$ PZ
$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7+1 = 211$ PZ
$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11+1 = 2311$ PZ
$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13+1 = 30031 = 59 \cdot 509$ keine PZ
$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17+1=?$

»Welche Möglichkeiten gibt es denn für die nächste Zahl?« Sie kann Primzahl sein oder auch nicht. Die Antwort erscheint vielen zu einfach, um sich dafür zu melden. Wir untersuchen jetzt beide Möglichkeiten getrennt und stellen fest: Wenn es eine Primzahl ist, dann haben wir eine größere als 17 gefunden. Aber was ist, wenn es keine Primzahl ist? Nach längerem Überlegen kommt der Durchbruch.

Hanni: »Sie muß dann Primfaktoren enthalten.« und Marion ergänzt: »Dies können aber nicht die 2, 3, 5,... 17 sein, denn die lassen beim Teilen den Rest 1. Die Primfaktoren müssen also größer als 17 sein«. Ich lobe die beiden - danach Schweigen. Das muß sich erst einmal setzen. Es arbeitet in den Köpfen. Nach und nach erkenne ich auf den Gesichtern vieler Schüler das Aha-Erlebnis. Und nun wollen auch andere zeigen, daß sie es verstanden haben. Ihre Darstellungen sind ähnlich. Wir fassen noch einmal zusammen.

Als Hausaufgabe sollen alle den Beweis aufschreiben, so, wie sie ihn verstanden haben. Hier ein Beispiel:

Beweis für unendlich viele Primzahlen: Man nimmt eine beliebig große Primzahl. Man multipliziert alle darunter liegenden Primzahlen mit einander und addiert zum Ergebnis die Zahl 1.

$$Zn = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot ... \cdot pn+1$$

1. Fall: Zn ist eine neue Primzahl, die mit Sicherheit größer ist als pn. Mit dieser neuen Primzahl kann man das System fortsetzen.

2. Fall: Zn ist keine Primzahl; Zn hat aber Primfaktor. Einer dieser Primfaktoren muß größer sein als pn, weil Zn die bereits miteinander multiplizierten Primfaktoren nicht mehr zum Teiler haben kann; da man 1 addiert hat und so ein Rest von 1 bliebe.

Der Primfaktor ist also größer und es gibt unendlich viele Primzahlen, da man damit das System fortsetzen kann.

3. Architektur und Dynamik des Lehrstücks

In seinem Aufsatz »Ein Unterrichtsgespräch ... « schrieb Martin Wagenschein: »Setzt man diese, recht intensiv so vorbereitete Frage [nach dem Nichtabbrechen der Primzahlen] in einen Kreis junger Menschen, so beginnt sofort ein Prozeß, der mit einer chemischen Reaktion verglichen werden kann in der Gesetzlichkeit seines Ablaufs ... Denn es ist gerade so, als sei die Lösung insgeheim gegenwärtig, wie hinter einem Vorhang des Unbewußten, und setzt sich langsam und in Stufen durch. « Er nannte diesen Vorgang einen »überpersönlichen Verwirklichungsprozeß« in dem sich »ganz besonders eindrucksvoll erkennen ließ, wie der antike Beweis sich immer mehr durchsetzte, bewußt wurde, von neuem erwuchs, >an den Tag kam<. Ich möchte vermuten, daß das Gespräch der unbekannten einzelnen Griechen, die diesen Gedanken zuerst dachten, ähnliche Wege gegangen ist.« (Wagenschein 1980, S. 229/2)

Diese Darstellung Wagenscheins gibt genau die Erfahrung wieder, die ich in beiden Unterrichtsdurchgängen gemacht habe. Dieselbe »Gesetzlichkeit des Ablaufs« ließ sich bis in die Stufenfolge und Schrittlänge hinein beobachten. Ich will versuchen, hier die vier m. E. wesentlichen Stufen zu beschreiben:

1.) Der Keim des Euklidschen Ansatzes: $N = 2n + 1$
2.) Die Entfaltung: Aus dem n werden viele Primzahlen
3.) Die volle Entfaltung und der indirekte Ansatz
4.) Glück im Unglück

1.) Am Anfang steht der zum Scheitern verurteilte Versuch, Formeln bzw. Terme zu finden, mit denen man Primzahlen erzeugen kann. Das Bauprinzip dafür erwächst aus der Definition der Primzahl; sie darf durch keine andere Zahl, vor allem durch keine andere Primzahl teilbar sein. Zunächst sind hier nur die kleinen Primzahlen wie 2 und 3 im Blickfeld der Schüler. Wie kann man ausschließen, daß eine Zahl durch 2 teilbar ist? Nun, sie darf kein Vielfaches von 2 sein. Alle Vielfachen der 2 enthalten den Faktor 2, lassen sich also schreiben als $n \cdot 2$ (bzw. 2n), wobei n eine natürliche Zahl ist. Das sind also alle geraden Zahlen. Die nicht durch 2 teilbaren Zahlen sind die ungeraden Zahlen, also die jeweiligen Nachfolger der geraden. Diese müssen dann die Gestalt $2n + 1$ haben, lassen sie doch beim Teilen durch 2 gerade den Rest 1. 2n+1 ist nun der Keim des Euklidschen Ansatzes.

2.) Bis dieser Ansatz sich in den weiteren Stufen voll entfaltet, müssen nun aus dem n des »Keimes« noch viele Primzahlen sprießen. Nicht nur die Teilbarkeit durch 2 muß ausgeschlossen werden; auch die 5 darf kein Teiler sein. Dies hat der Schüler Peter aus Wagenscheins Bericht intuitiv erfaßt, als er die Vermutung formulierte, alle Zahlen der Form 6n+1 (2·3·n+1) seien Primzahlen. Bis nun das n sich als Produkt vieler Primzahlen entpuppt, sind noch weite Wege zurückzulegen. Oft bestehen sie aus experimentellen Ansätzen wie in meinem ersten Durchgang in der Klasse 6, in dem eine Schülerin vermutete, durch die Folge

$$2 \cdot 2+1 = 5$$
$$2 \cdot 5+1 = 11$$
$$2 \cdot 11+1 = 23$$
$$2 \cdot 23+1 = 47$$

ein Gesetz zur Erzeugung von Primzahlen gefunden zu haben. Die an sich unzutreffende Begründung ihres Primzahlcharakters - die gewonnenen Zahlen seien ja nicht durch 2 und die jeweils andere verwendete PZ teilbar (Rest 1 beim Teilen) - ist in doppelter Hinsicht richtungsweisend: Sie enthält die zutreffende Einsicht, daß man beim Nachweis der Primzahleigenschaft einer Zahl die Teilbarkeit durch andere PZn ausschließen muß. Und: Sie übersieht, daß die durch 2 und 2, 2 und 5, 2 und 11, 2 und 23 gefundenen Zahlen noch andere Primzahlteiler als die zur Konstruktion verwendeten haben können.

Dieser Mangel wird aber durch das Scheitern des Ansatzes fast automatisch behoben. Denn das nächste Glied der Folge:

$$2 \cdot 47+1 = 95$$

ist keine PZ, hat aber in seiner PZ-Zerlegung die bei seiner Entstehung nicht beteiligten PZn 5 und 19 (5 - 19 = 95). Ich glaube, die wesentliche Aufgabe des Lehrers besteht an dieser Stelle darin, das Scheitern eines Ansatzes konstruktiv zu wenden. Eine Primzahl p, die nicht Teiler einer Zahl N ist, wird aufgenommen in die Reihe der Faktoren der Darstellung $N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot p + 1$.

3.) Hiermit ist man nun an der dritten Stufe angelangt. Noch immer ist das Ziel, Formeln zur Berechnung von Primzahlen zu finden - wie am Anfang. Doch das eher blinde Tasten, Probieren und Scheitern war nicht umsonst. Jetzt weiß man, daß bei der Konstruktion einer solchen Formel Schritt für Schritt die Teilbarkeit durch jede weitere bekannte Primzahl ausgeschlossen werden muß:

$$2+1 = 3$$
$$2 \cdot 3+1 = 7$$
$$2 \cdot 3 - 5+1 = 31$$
$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7+1 = 211$$
$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11+1 = 2311$$

Um diese Folge nun allgemein fortsetzen und aufschreiben zu können, braucht man eine vorläufig größte Primzahl p_n, das heißt, man stellt sich die Primzahlen der Größe nach geordnet vor. Die erste ist 2, die zweite 3, die n-te p_n. Das Dilemma ist nun aber dies, daß man mit einer größten Primzahl arbeitet, obwohl man der Überzeugung ist, daß es gar keine größte geben kann. Wie kommt man da heraus?

Der indirekte Ansatz liegt nahe: Wenn man eine größte gefunden zu haben meint, wird dies gerade durch die Angabe einer noch größeren Lüge gestraft. Damit ist das Nichtabbrechen der Primzahlen offenbar richtig erfaßt und ausgedrückt. Wenn also p_n die größte bekannte Primzahl sein soll, dann kann man durch

$$N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot p_n+1$$

eine noch größere angeben.

4.) Das Ziel ist erreicht, wenn man nachweisen kann, daß diese Zahl N eine Primzahl ist. Dies ist bei den oben angegebenen ersten fünf Gliedern der Folge zutreffend: 3, 7, 31, 211, 2311 sind PZn. Das Unglück bricht bei n = 6, $p_6 = 13$ herein:

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13+1 = 30031$$

ist keine Primzahl. Alles umsonst?

Nein! die konstruierte Zahl hat die Primfaktoren 59 und 509 (30031 = 59·509). Damit ist eine Primzahl (hier sogar zwei) gefunden, die größer ist als die an der Konstruktion beteiligten Primzahlen. Und dies läßt sich verallgemeinern: Geht man von diesem Ansatz aus, dann sind zwei Fälle möglich:

- entweder ist N selbst eine Primzahl

- oder N ist keine PZ. Dann muß sie aber Primfaktoren enthalten, die nicht unter den 2, 3, 5, . . . Pn vorkommen, da N durch diese nicht teilbar ist. Die neu gefundenen Primzahlen müssen also größer sein als diese.

In beiden Fällen hat man also eine größere Primzahl als Pn erhalten. Das Ziel ist erreicht.

Ich will versuchen, nach der Architektur auch die Dynamik dieses Erkenntnisprozesses zu beschreiben, diese vorwärtsdrängende Spannung, die den Durchsetzungsvorgang des Beweises vorantreibt. Ausgangspunkt jeder Zahlentheorie ist die Folge der natürlichen Zahlen. Erzeugt werden kann sie aufgrund zweier Prinzipien, der Addition und der Multiplikation. Das eine, elementare ist die Addition. Sie besitzt ein »Atom«, die Eins. Alle übrigen natürlichen Zahlen entstehen durch fortgesetztes Hinzufügen der Eins zu Vorhandenem. Die Eins selbst steht am Anfang. Dies ist ein Teil des Inhalts der Peano-Axiome, die dem axiomatischen Aufbau der natürliche Zahlen zugrunde liegen. Dieses Prinzip hat etwas Archaisches: langsam aber unaufhaltsam setzt sich die Folge der natürlichen Zahlen fort - bis ins Unendliche.
Daneben steht das andere Prinzip, die Multiplikation. Sie ist zwar als »Abkürzung« der Addition ($5 \cdot 2 = 2+2+2+2+2$) auf diese zurückführbar, entwickelt dann aber überraschenderweise ihre eigenen »Atome«. Dies sind gerade die Zahlen, die sich nicht als Produkt anderer Zahlen schreiben lassen, eben die Primzahlen. (Von dem Faktor 1 sehen wir einmal ab, der in diesem Zusammenhang etwas impotent wirkt.) Es zeigt sich, daß sich alle natürlichen Zahlen als Produkte von Primzahlen darstellen lassen und daß diese Darstellung - bis auf die Reihenfolge der Faktoren - eindeutig ist. Dieser Sachverhalt erschien den Mathematikern so bedeutsam, daß er den Namen »Fundamentalsatz der Zahlentheorie« erhielt. Damit ist natürlich noch nicht gesagt, ob man mit endlich vielen »Mal-Atomen« auskommt.

Die Antwort liefert erst die Verbindung beider Prinzipien. Sie bringt Bewegung in die Sache. So hat z. B. die Zahl 30 die »Multiplikationsatome« 2, 3 und 5 ($30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$), ihr Nachfolger $31 = 30+1$, eine Primzahl, keins davon. Ist 30 durch 2, 3 und 5 teilbar, so läßt 31 beim Teilen durch diese PZn den Rest 1. Diese »+1 « beim Übergang von 30 zu 31 (oder von $39 = 3 \cdot 13$ zu $39 + 1 = 40 = 2^3 \cdot 5$), allgemein von einer natürlichen Zahl N auf ihren Nachfolger N + 1 entwertet praktisch alle Primfaktoren des Vorgängers als »Multiplikationsatome« für den Nachfolger. Für ihn müssen neue her. Diese müssen, wie das Beispiel 3940 zeigt, nicht notwendig größer sein als die des Vorgängers. Man kann ja durch fortgesetztes Multiplizieren mit einer kleinen Primzahl Zahlen erzeugen, die jede vorgegebene Schranke übertreffen.

Erst wenn man aufs Ganze geht, und eine Zahl aus allen verfügbaren Primzahlen bildet, also $N = p^1, p^2, p^3, \ldots p^n$ kommt der Durchbruch. - Um diesen Ansatz überhaupt aufschreiben, ja denken zu können, muß man von endlich vielen Primzahlen ausgehen. Damit ist der indirekte Beweis auf fast natürliche Weise vorgegeben. - Das + 1 beim Übergang von N auf N + 1 entwertet mit einem Schlag alle vorhandenen Primzahlen. Der Nachfolger N + 1 braucht mehr, und damit können die $p^1, p^2, p^3, \ldots, p^n$ nicht alle gewesen sein.

Ich glaube, daß die » Gesetzlichkeit des Ablaufs «, von der Wagenschein schreibt, in der Konkurrenz der beiden Bauprinzipien Addition und Multiplikation gegründet ist, und daß beide in ihrem Spannungsverhältnis im Unbewußten der Schüler tief verankert sind.